

Unentscheidbare Sätze der Mathematik
und der Versuch
ihrer philosophischen Deutung

Walter Hoering

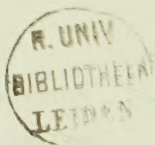
1961

Unentscheidbare Sätze der Mathematik
und der Versuch ihrer philosophischen Deutung .

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Philosophischen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von
Walter Hoering
in München

Referent : Prof. Dr. W. Stegmüller
Korreferent : Prof. Dr. W. Britzelmayr
Tag der mündlichen Prüfung : 27. Juli 1961



Der Herr

Die ich in der Gegenwart
 noch immer anerkenne,
 die mich als ein Mitglied
 der Nation vereint.

Meinen verehrten Lehrern

Herrn Professor Dr.W. Britzelmayr

Herrn Professor Dr.Dr.W. Stegmüller

möchte ich für die

verständnisvolle Förderung

meiner Arbeit danken.

Wolfgang Kuch



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Der Knoten

Als ich in Jugendtagen
Noch ohne Grübeleien,
Da meint ich mit Behagen,
Mein Denken wäre frei.

Seitdem hab ich die Stirne
Oft in die Hand gestützt
Und fand, daß im Gehirne
Ein harter Knoten sitzt.

Mein Stolz, der wurde kleiner,
Ich merkte mit Verdruß:
Es kann doch unsereiner
Nur denken, wie er muß.

Wilhelm Busch

I n h a l t

Einführung	Seite
Einleitung	1
Der Stand der mathematischen Grundlagenforschung	2
1. Die These von Church	2
2. Die Nichtformalisierbarkeit der Arithmetik	3
3. Rekursive Ordinalzahlen und ordinale Logiken	4
Hauptteil	
Der Gedankengang der Arbeit	4
Verallgemeinerung eines Argumentes von Kalmár	5
Zur Präzisierung des Begriffes der intuitiven	
Beweisbarkeit	9
Die mathematischen Standpunkte	9
Ordinal - Logiken und die Präzisierung des	
Begriffs der intuitiven Beweisbarkeit	10
Deutung der Ergebnisse	13
Die Bedeutung unserer Ergebnisse für die	
Mathematik	13
Versuch einer philosophischen Deutung	13
Literatur	17

Einleitung

"Man lege sich ein bestimmtes, ungelöstes Problem vor, etwa die Frage nach der Irrationalität der Euler-Mascheroni'schen Konstanten C oder die Frage, ob es unendlich viele Primzahlen von der Form $2^n + 1$ gibt. So unumgänglich diese Probleme uns erscheinen und so ratlos wir ihnen zur Zeit gegenüberstehen - wir haben dennoch die sichere Überzeugung, daß ihre Lösung durch eine endliche Anzahl rein logischer Schlüsse gelingen muß

Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf:

Da ist das Problem, suche die Lösung ! Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus !"

Soweit D. Hilbert in seinem Vortrag auf dem Pariser Mathematiker-Kongreß 1900 (10).

Den gleichen festen Glauben an die Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems bringt L. Kalmár in (13) zum Ausdruck. Er macht ihn sogar zur Grundlage eines Argumentes gegen die von Church, Turing und Kleene stammende Präzisierung des Berechenbarkeitsbegriffes. Nicht ganz so optimistisch ist Mostowski (18), entgegengesetzter Meinung Brouwer (1,2). Stegmüller (25) S. 207 und Scholz-Hasenjaeger (21) S.460 weisen auf die Fragestellung hin und auch Tarski scheint sich mit ihr beschäftigt zu haben (18), Fußnote 18) auf S. 161. Geben wir eine erste Präzisierung der Hauptfrage unserer Arbeit:

Gibt es in der Mathematik - insbesondere der Arithmetik - Sätze, deren Wahrheitswert zwar semantisch bestimmt ist, trotzdem aber auf keine Weise festgestellt werden kann?

Eine Antwort auf diese Frage ist für den Mathematiker und für den Philosophen der Mathematik in gleicher

Weise von Bedeutung. Dabei darf man nicht aus dem Auge verlieren, daß man schon dadurch, daß man diese Frage für sinnvoll hält, eine bestimmte Position in der Philosophie der Mathematik bezieht. Wir halten sie für sinnvoll und werden dies zu begründen versuchen. Unsere Untersuchungen werden sich vor allem auf formale Systeme der Arithmetik richten und von der klassischen Logik Gebrauch machen. Auf dieser Grundlage werden wir, wie anscheinend auch Markow (13) S.79, Fußnote 2, ein Argument für den intuitionistischen Vorbehalt gegenüber dem tertium non datur gewinnen können, andererseits aber zeigen, daß dieser Vorbehalt streng intuitionistisch nicht zu begründen ist. Außerdem soll versucht werden, den Begriff des Beweises mit intuitiv als korrekt erkennbaren Mitteln zu präzisieren, oder was auf dasselbe hinausläuft, den Begriff der absoluten Unentscheidbarkeit. Damit käme man der Erfüllung von "Novikovs Prognose" (vgl. (13), S.77, Fußnote 1), welche die Möglichkeit einer solchen Präzisierung behauptet, einen Schritt näher.

Der Stand der mathematischen Grundlagenforschung.

Es sei nun der Stand der mathematischen Grundlagenforschung, soweit er die Problemstellung dieser Arbeit berührt, in drei Punkten zusammengefaßt.

1) Die These von Church

behauptet, daß jede mechanisch berechenbare Funktion allgemein rekursiv ist. Sie gibt für den intuitiven Begriff der Berechenbarkeit einer Funktion, der so verstanden wird, daß unter ihm sowohl die Berechenbarkeit durch einen menschlichen Rechner wie auch durch einen Rechenautomaten fällt, eine Präzisierung und behauptet, daß diese adäquat ist.

Einen Beweis dieser These kann man sich schwer vorstellen, wohl aber eine Widerlegung dadurch nämlich, daß eine bestimmte, effektiv berechenbare aber nicht allgemein rekursive Funktion vorgewiesen würde. Auf diese Weise wäre die Unzweckmäßigkeit der vorgenommenen Präzisierung des Berechenbarkeitsbegriffes nachgewiesen. Versuche, ein derartiges Gegenbeispiel zu finden, sind

bis heute erfolglos geblieben; man hat vielmehr die Äquivalenz verschiedener unabhängig voneinander vorgekommener Explikationen des Berechenbarkeitsbegriffes nachweisen können. Das hat dazu geführt, daß die These von Church bei den meisten Logikern als gesichert gilt und selbst wieder zum Ausgangspunkt weitgehender Untersuchungen gemacht wird (vergl. Tarski (30)).

Wir verwenden diese These von Church in folgender Form:
(C) Jede effektiv erzeugbare Menge ist rekursiv aufzählbar.

2.) Die Nichtformalisierbarkeit der Arithmetik

(vgl. Gödel und Tarski, (9) u. (30)).

Unter Systemen der Arithmetik verstehen wir im folgenden solche, die "genügend stark" sind, also etwa die Peano-Arithmetik als Teilsystem enthalten.

a. Die semantische Wahrheitsdefinition (vgl. (18))

für die Sätze der Arithmetik ist *v o l l s t ä n d i g* aber nicht *k o n s t r u k t i v*, d.h. sie bestimmt zwar für jeden Satz der Arithmetik einen Wahrheitswert, gibt aber kein rekursiv aufzählbares Axiomensystem, aus dem alle wahren Sätze ableitbar wären und erst recht kein Entscheidungsverfahren für die Wahrheit.

b. Die *k o n s t r u k t i v e n* (rekursiv aufzählbaren) Systeme der Arithmetik sind *n i c h t v o l l s t ä n d i g*, d.h. sie liefern stets nur einen Teil der "wahren" Sätze.

c. Zu jedem rekursiv aufzählbaren System der Arithmetik kann man sofort - im Einklang mit der Wahrheitsdefinition - ein stärkeres effektiv konstruieren. (2. Gödel'scher Satz (9)).

Diese Ergebnisse - insbesondere c. - haben einige Foscher veranlaßt zu glauben, daß der Begriff der Intuitiven Beweisbarkeit einer formalen Erfassung prinzipiell ^{un-}zugänglich sei, andere haben versucht, durch Konstruktion transfiniter Türme von Systemen den Konsequenzen der Theoreme von Gödel und Rosser auszuweichen, z.B. Hao Wang (32).

3.) Rekursive Ordinalzahlen und ordinale Logiken.

Die Einführung des Begriffs der konstruktiven Ordinalzahlen verdanken wir Church und Kleene (14).

Auf diesem Begriff aufbauend hat Turing (31) die Ordinal-Logiken eingeführt, die von Hao Wang (32), Feferman (5,6) und Kreisel (17) weiterentwickelt wurden. Sie haben zum Teil die angenehme Eigenschaft, gegen die unter 2.)c. erwähnten Erweiterungskonstruktionen immun zu sein. Wird aber bei ihrem Aufbau der gesamte Bereich der Church-Kleene'schen konstruktiven Ordinalzahlen in Anspruch genommen, so entstehen im allgemeinen nichtkonstruktive d.h. auf jeden Fall nicht rekursiv aufzählbare Systeme, z.B. (32). Wie Kreisel entdeckt hat (17), ist das Hilfsmittel der Ordinal-Logiken auch geeignet, nichtformale Beweisbegriffe zu präzisieren. Wir werden die "ordinal logics" zu diesem Zwecke benützen.

Der Gedankengang der Arbeit.

Zunächst wird durch Verallgemeinerung und Umdeutung eines Argumentes von Kalmár der Satz gewonnen: Wenn nicht alle definierbaren Prädikate effektiv erzeugbar sind, gibt es absolut unentscheidbare Sätze. Hier wird vorausgesetzt, daß für den zugrunde liegenden Formalismus eine semantische Wahrheitsdefinition gegeben wurde.

Im zweiten Teil wird versucht, den Begriff der "Beweisbarkeit mit intuitiv als korrekt erkennbaren Mitteln" zu präzisieren. Dieser Versuch stößt auf zwei charakteristische Schwierigkeiten:

1. läßt sich zu jeder Axiomatisierung der Zahlentheorie nach Gödel sofort ein Satz angeben, der, obwohl wahr, durch diese nicht erfaßt wird. (vgl. 3.c.)
Dieser Schwierigkeit kann man dadurch begegnen, daß man einen transfiniten Turm von Systemen baut, der gegen diese Art von Erweiterungen immun ist.
2. gibt es eine Reihe von Sätzen: das tertium non datur, das Auswahlaxiom, das Axiom der Existenz unerreich-

barer Mengen und andere mehr, die von den Mathematikern je nach deren Standpunkt teils angenommen, teils abgelehnt werden.

Wir unterscheiden daher verschiedene mathematische Standpunkte, die grundsätzlich gleichberechtigte Ausgangspunkte für den Aufbau einer Mathematik (Arithmetik) darstellen.

Verallgemeinerung eines Arguments von Kalmár.

Die folgende Diskussion spielt sich auf der Ebene des inhaltlichen Denkens in einer kaum präzisierten Umgangssprache ab. Wir legen eine Formalisierung F der Arithmetik etwa auf der Basis einer (transfiniten) Typentheorie zugrunde, für die eine semantische Wahrheitsdefinition gegeben sei.

Der Grundgedanke Kalmárs besteht darin, eine Beziehung aufzusuchen zwischen den beiden intuitiven Begriffen der Berechenbarkeit und der "Beweisbarkeit durch intuitiv als korrekt erkennbare Mittel" (bei Kalmár: "provability by arbitrary correct means"). Um diese Überlegungen in einer allgemeinen Form darzustellen, erweist es sich als günstig, auf der gleichen Ebene einen dritten Begriff einzuführen: den Begriff der effektiven Erzeugbarkeit. Man kann ihn folgendermaßen charakterisieren:

Eine Menge (von Wörtern eines Alphabetes) ist effektiv erzeugbar, wenn ein effektives Verfahren angegeben werden kann, das genau diese Menge erzeugt.

Mit Hilfe dieses Begriffes läßt sich der Berechenbarkeitsbegriff in inhaltlich befriedigender Weise definieren:

D 1 Eine Menge ist berechenbar genau dann, wenn sie selbst, wie auch ihre Komplementärmenge, effektiv erzeugbar ist. Die Begriffe "effektiv erzeugbar" und "berechenbar" verhalten sich also zueinander wie die formalen Begriffe "rekursiv aufzählbar" und "rekursiv" oder "A-rekursiv-aufzählbar" und "A-rekursiv".

Terminologische Anmerkung.

Abweichend von der üblichen Terminologie, die Klassen, deren charakteristische Funktion berechenbar ist, als entscheidbar bezeichnet, nennen wir derartige Klassen berechenbar. Wir tun dies, um die Entscheidbarkeit von Klassen von dem in unseren Betrachtungen gleichzeitig vorkommenden Begriff der Entscheidbarkeit von Sätzen deutlich abzuheben.

Nun kommen wir zum entscheidenden Punkt.

Vom Begriff der effektiven Erzeugbarkeit fordern wir, daß er konsistent sei mit dem Begriff der Beweisbarkeit mit intuitiv als korrekt erkennbaren Mitteln (kurz: intuitive Beweisbarkeit, noch kürzer: IB).

Das ist wegen D 1 zugleich eine Forderung an den Berechenbarkeitsbegriff.

Diese Konsistenzforderung ist per definitionem genau dann erfüllt, wenn

1. für jedes in F definierbare Prädikat $f(x)$ gilt:
Die Menge der a für die $f(a)$ intuitiv beweisbar (IB-beweisbar) ist, ist effektiv erzeugbar (B-erzeugbar).
2. Ist eine effektiv erzeugbare Menge gegeben, so ist für jedes Element dieser Menge intuitiv beweisbar, daß es der Erzeugungsvorschrift genügt.

Wäre 1. nicht erfüllt, so könnte man mit Hilfe der intuitiven Beweisbarkeit Mengen erzeugen, die nicht effektiv erzeugbar sind. Wäre 2. nicht erfüllt, so wäre der Erzeugungsbegriff intuitiv nicht erfassbar.

Die Forderung der Konsistenz ist also inhaltlich als durchaus natürlich zu erkennen.

Wir nehmen für das weitere an, es liege ein Begriff der effektiven Erzeugbarkeit B und ein Begriff der intuitiven Beweisbarkeit IB fest derart, daß B mit IB konsistent ist.

Wir führen den Begriff der B -Berechenbarkeit im Sinne von D1 ein:

D 1' Eine Menge ist B-berechenbar genau dann, wenn sie selbst, wie auch ihre Komplementärmenge, B-erzeugbar ist. Diese Definition kann man in üblicher Weise auf Prädikate ausdehnen. x.)

Für IB machen wir folgende einleuchtende Voraussetzung:

V 2 Wenn ein Satz von F IB-beweisbar ist, dann ist er wahr im Sinne der semantischen Wahrheitsdefinition für F.

Nun können wir Satz 1 formulieren und beweisen.

S 1 Es sei $g(x)$ ein nicht B-berechenbares Prädikat (von F), dann gibt es ein a (in F) derart, daß $g(a)$ IB-unentscheidbar ist. (d.h. weder $g(a)$ noch $\neg g(a)$ ist IB-beweisbar).

Beweis.

Aus der Nicht-B-Berechenbarkeit von $g(x)$ folgt gemäß D1, daß $g(x)$ oder $\neg g(x)$ nicht B-erzeugbar ist. Nehmen wir an, daß $g(x)$ nicht B-erzeugbar ist, so folgt aus D2, Teil 1, daß es ein a gibt derart, daß $g(a)$ nicht IB-beweisbar ist, obwohl $g(a)$ gilt. Folglich ist für dieses a $g(a)$ IB-unentscheidbar. Analog kann man unter der Annahme, daß $\neg g(x)$ nicht B-erzeugbar ist, schliessen.

S 2 Satz 2

Es sei $g(x)$ ein nicht B-berechenbares, aber B-erzeugbares Prädikat, dessen Erzeugungsvorschrift bekannt ist, dann gibt es gemäß S1 IB-unentscheidbare Sätze $g(a)$. Für keinen dieser Sätze ist die IB-Unentscheidbarkeit IB-beweisbar.

Beweis:

Die a , für die $g(a)$ gilt, bilden eine Menge, die gemäß Voraussetzung B-erzeugbar ist. Gemäß D2, Teil 2 ist für alle diese a $g(a)$ IB-beweisbar. Könnten wir nun IB-beweisen, daß $g(a)$ IB-unentscheidbar ist, so folgte daraus, daß $g(a)$ nicht gilt. Wir hätten somit einen IB-Beweis für $\neg g(a)$ im Widerspruch zur Annahme.

Bemerkung zu S 2.

Im Sinne der später gezeigten Präzisierungsmöglichkeit für den Begriff der intuitiven Beweisbarkeit behandeln

x.) In sofort verständlicher Weise verwenden wir neben IB-ableitbar den Terminus " IB-unentscheidbar ".

wir hier IB wie ein formales System.

Es scheint möglich zu sein, sich der Prämisse der B-Erzeugbarkeit in S 2 durch ein geläufiges metamathematisches Argument zu entledigen: Aus der IB-Beweisbarkeit der IB-Unentscheidbarkeit eines beliebigen Satzes könnte man die Konsistenz von IB folgern. Diese darf aber im allgemeinen in IB nicht beweisbar sein (Tarski (29), 2. Gödelscher Satz). Da Feferman in (3,4 u.7) auf die Fehler hingewiesen hat, die sich gerade bei diesem Gedankengang, wenn er unpräzise durchgeführt wird, einschleichen können, und wir in unserem Fall keinen Weg sehen, ihn kurz, präzise und allgemein darzustellen, wollen wir hier nur auf die Möglichkeit hinweisen, ihn eventuell bei konkret vorliegenden Systemen der IB-Beweisbarkeit anzuwenden.

Aus S 1 folgt sofort, wenn man $g(x)$ als das Prädikat betrachtet, das genau auf die (Gödelnummern der) gültigen Sätze einer Theorie T zutrifft, Satz 3.

S 3 Ist T eine B-unentscheidbare Theorie, d.h. ist das Prädikat $g(x)$ der Gültigkeit in T nicht B-berechenbar, so gibt es in T IB-unentscheidbare Sätze.

Durch die obigen Betrachtungen (S 1 und Beweis) haben wir die Frage nach der Existenz IB-unentscheidbarer Sätze auf die Frage der Definierbarkeit nicht B-erzeugbarer Prädikate in der betrachteten Theorie zurückgeführt. Denken wir an eine starke Fassung der Zahlentheorie (z.B. F) und verwenden die absoluten Begriffe, so können wir verallgemeinernd formulieren:

S 4 Wenn in einer Theorie mit einem semantisch festgelegten Gültigkeitsbegriff nicht alle definierbaren Prädikate effektiv erzeugbar sind, so enthält sie absolut unentscheidbare Sätze.

Spezialfälle von S 1 und S 2 unter der Voraussetzung der Church-These C finden sich bei Kalmár (13) und Peter (20). Wir haben über die B-Erzeugbarkeit und IB-Beweisbarkeit keine Voraussetzung gemacht außer der Konsistenzforderung (V 1), der inhaltlichen Richtigkeit von IB (V 2) und

der Annahme, daß gewisse einfache Schlüsse in IB zur Verfügung stehen. Unsere Sätze behielten daher auch ihre Berechtigung, wenn sich herausstellen sollte, daß der Begriff der rekursiven Aufzählbarkeit in C durch einen anderen definierbaren ersetzt werden müßte. Setzen wir aber C voraus, beschränken wir also die B-Erzeugbarkeit auf die rekursive Aufzählbarkeit und wählen eine damit konsistente IB-Ableitbarkeit, so erhalten wir aus S 1 bis S 3 unter Verwendung der üblichen Terminologie S 5. Vorausgesetzt wird C (B-erzeugbar = rekursiv aufzählbar) und ein damit konsistenter Begriff der IB-Ableitbarkeit, r. Dann gilt: Jede rekursiv unentscheidbare Theorie T enthält r-unentscheidbare Sätze. Ist T außerdem axiomatisierbar, so läßt sich keiner dieser Sätze mit den Mitteln von r als r-unentscheidbar beweisen.

Durch S 4 scheint die Existenz absolut unentscheidbarer Mengen hinlänglich gesichert, um eine Diskussion der Bedeutung dieses Ergebnisses zu rechtfertigen, dies umso mehr, als man durch Verwendung gebundener Variablen transfiniter Ordnung in der Zahlentheorie die Klasse der definierbaren Mengen praktisch unbegrenzt erweitern kann. Für eine prinzipielle Diskussion scheint es weniger wichtig, auf welcher Ordnung absolut unentscheidbare Sätze auftreten, als vielmehr die Tatsache, daß sie auftreten. Wie kompliziert die Struktur der Unentscheidbarkeit schon in den untersten Ordnungen ist, zeigen die Arbeiten von Kleene (15), Kleene und Post (16), Shoenfield (22) und Spector (23) über "degrees of recursive unsolvability".

Zur Präzisierung des Begriffes der intuitiven Beweisbarkeit. Die mathematischen Standpunkte.

Wir führen folgende Terminologie ein. Ein mathematischer Standpunkt charakterisiert in nicht notwendig präziser Weise eine gewisse Auswahl mathematischer Sätze und Schlußweisen; Beispiele: Intuitionismus, Platonismus, Finitismus. Ein mathematischer Standpunkt kann normalerweise auf verschiedene Arten präzisiert werden, derart,

daß die zugelassenen Axiome und Schlußregeln genau angegeben werden. Ist dies geschehen, sprechen wir von einem syntaktisch präzisierten Standpunkt. Nach dem Muster der semantischen Wahrheitsdefinition für die Arithmetik kann man einen Standpunkt auch semantisch präzisieren: Es entsteht so ein semantisch präzipierter Standpunkt. Uns interessiert vorwiegend die syntaktische Präzisierung. Sie ist, um es noch einmal mit anderen Worten zu sagen, dann erreicht, wenn der betreffende Standpunkt formalisiert ist, oder wenn zumindest kein Zweifel mehr darüber bestehen kann, wie eine Formalisierung zu bewerkstelligen ist. Aus dem herrschenden Pluralismus der mathematischen Standpunkte ziehen wir die Konsequenz, alle syntaktisch präzisierten Standpunkte auf der Basis der Gleichberechtigung (auch ohne Konsistenznachweis) zuzulassen. Es kann natürlich der Fall eintreten, daß ein derartiger Standpunkt sich als widerspruchsvoll erweist. Liesse man aber nur die (finit) beweisbar konsistenten Standpunkte zu, so bliebe von der Mathematik nicht mehr viel übrig. Zwischen zwei präzisierten Standpunkten kann die Beziehung bestehen, daß der eine eine Verstärkung des anderen darstellt, oder daß die Widerspruchsfreiheit des einen Standpunktes unter Annahme der Konsistenz des anderen Standpunktes bewiesen werden kann. Die Konsequenz des Pluralismus der möglichen mathematischen Standpunkte zog auch Bernays in der Diskussion im Symposion "Ordnung in der Logik" anläßlich des Deutschen Philosophenkongresses München 1960: "Es ist gar nicht ausgemacht, daß die Mathematik monistisch zu konstruieren ist", vgl. (12).

Ordinal-Logiken und die Präzisierung des Begriffs der intuitiven Beweisbarkeit.

Wie schon erwähnt, hatte man aus dem 2. Gödelschen Satz die Konsequenz gezogen, daß eine Präzisierung im Sinne einer Formalisierung des Begriffes der intuitiven Beweisbarkeit nicht möglich sei. Wir werden zeigen, wie man

diese Schwierigkeit mit Hilfe des Turing'schen Begriffs (31) der Ordinal-Logik überwinden kann. Zunächst aber wollen wir uns fragen, wie ein Begriff der intuitiven Ableitbarkeit beschaffen sein müßte, wäre er tatsächlich nicht formalisierbar. Er müßte nach den oben angeestellten Überlegungen nicht effektiv erzeugbar sein. Es ist aber schwer einzusehen, wie der Mensch, auch mit Hilfe einer noch so starken Fähigkeit der Intuition imstande sein sollte, mehr als endlich viele Axiome und effektive Regeln im Laufe seiner begrenzten Lebenszeit aufzustellen. Ein System aus endlich vielen Axiomen und effektiven Regeln bestehend ist aber, gemäß der Bedeutung dieses Wortes, stets effektiv erzeugbar und damit in gewissem Sinne formalisierbar.

Nun zum Problem der Gödel-Erweiterbarkeit eines jeden formalisierten Systems der Arithmetik. Es liegt nahe, zu Systemen der Arithmetik Regeln zu adjungieren, welche dafür sorgen, daß stets die wahre Komponente der von Gödel als unentscheidbar bewiesenen Satzpaare $(A, \neg A)$ zu dem jeweils durch diese Operation (des Hinzufügens) schon erreichten Axiomensystem hinzugefügt wird. Das durch die eben beschriebene Regel erzeugte System ist rekursiv aufzählbar; man kann es also selbst wieder genauso wie das ursprüngliche System der Regel der sukzessiven Gödel-Erweiterung unterwerfen. Feferman hat gezeigt, wie man diesen Prozeß durch alle konstruktiven Ordinalzahlen hindurch fortsetzen kann (5,6). Er erwähnt auch die Möglichkeit, "autonome" Systeme zu bilden, in denen nur Kleene-Nummern von Ordinalzahlen verwendet werden, von denen im System beweisbar ist, daß sie Kleene-Nummern sind. Für Einzelheiten müssen wir auf Feferman's Arbeiten (5,6) verweisen.

Die autonomen Systeme Fefermans sind wieder rekursiv aufzählbar, mehr noch, man kann effektiv eine rekursive Aufzählung angeben. Daraus ergibt sich wieder eine Gödel-Erweiterung im oben angedeuteten Sinne. Wir führen den Begriff Gödel-immun ein: ein System soll Gödel-

immun heißen, wenn man nicht mit den Methoden Gödels eine echte Erweiterung des Systems angeben kann. Nun kann man die Fefermanschen Systeme folgendermaßen charakterisieren: Die autonomen Systeme sind zwar konstruktiv (d.h. rekursiv aufzählbar), aber nicht Gödel-immun. Die allgemeinen Systeme Fefermans (die also nicht auf den autonomen Teil beschränkt sind), können Gödel-immun aufgebaut werden, sie sind jedoch im allgemeinen nicht konstruktiv, da die Klasse O der Kleeneschen Ordinalzahlennummern einen sehr hohen Grad der rekursiven Unentscheidbarkeit besitzt (24).

Wir konstruieren nun ein Gödel-immunes konstruktives System dadurch, daß wir eine autonome Folge autonomer Folgen von Systemen bilden. Diese Folge entsteht dadurch, daß wir als Regel adjungieren, daß eine als rekursiv aufzählbar beweisbare Folge von Systemen wieder zu einem System zusammengefaßt werden kann, und daß jedem System seine Gödel-Erweiterung als Nachfolgersystem zugeordnet wird. Da die Operation der Gödel-Erweiterung, wie intuitiv einsichtig ist, von inhaltlich korrekten Systemen zu inhaltlich korrekten Systemen führt, erhalten wir auf diese Weise eine Folge von rekursiv aufzählbaren Systemen, welche, da sie effektiv erzeugbar ist, rekursiv aufzählbar ist, und nur inhaltlich korrekte Systeme enthält. Diese Folge ist Gödel-immun gemäß Konstruktion.

Wir wollten hier nur die Methode schildern, mit deren Hilfe es möglich ist - trotz der Gültigkeit der Gödelschen Sätze - einen hinlänglich präzisierten mathematischen Standpunkt zu formalisieren.

Deutung der Ergebnisse.

=====

Bei der folgenden Diskussion setzen wir folgende Ergebnisse als gesichert voraus, die wir als die Hauptresultate unserer Arbeit betrachten:

1. Es gibt absolut unentscheidbare Sätze in der Mathematik.
2. Jeder hinreichend präzisierte mathematische Standpunkt kann formalisiert werden.

Die Bedeutung unserer Ergebnisse für die Mathematik.

1. Der eingangs geschilderte Optimismus Hilberts ist nicht gerechtfertigt. Es wird nun interessant, die Gebiete abzustecken, in denen sicher keine absolut unentscheidbaren Sätze auftreten und sie möglichst präzise abzugrenzen von jenen, in denen mit Sicherheit derartige Sätze zu erwarten sind. Dazu können Arbeiten in Richtung des Buches von Surányi (27) dienen.
2. Es kann interessant sein, bisher in einem absoluten Sinne gebrauchte Begriffe zu relativieren auf die möglichen mathematischen Standpunkte; so z.B. (P sei ein Standpunkt) rekursiv zu P-beweisbar-rekursiv, konstruktive Ordinalzahl zu P-beweisbar-konstruktive Ordinalzahl, reelle Zahl zu P-reelle Zahl.
3. Als Aufgabe höherer Art ergibt sich die Untersuchung der Beziehungen zwischen verschiedenen präzisierten Standpunkten, für die natürlich selbst wieder ein Standpunkt zu wählen ist.

Versuch einer philosophischen Deutung.

Wir wollen nun unsere Ergebnisse mit verschiedenen Einstellungen konfrontieren, die man gegenüber der Mathematik haben kann, zunächst mit den herkömmlichen Positionen des Intuitionismus, Logizismus und Formalismus, die ja, philosophisch gesehen, weder

homogen sind, noch eine alle Möglichkeiten ausschöpfende, vollständige Disjunktion von grundsätzlich gleichberechtigten Standpunkten darstellen (25).

Intuitionismus.

Unser Resultat bezüglich der Existenz absolut unentscheidbarer Sätze ist mit Hilfe der klassischen Logik gewonnen und stellt eine Existenzaussage dar, die wesentlich nicht-konstruktiv ist, zeigen wir doch, daß für eine große Klasse von absolut unentscheidbaren Sätzen sicher gilt, daß ihre absolute Unentscheidbarkeit nicht bewiesen werden kann. Kann der Intuitionist unsere Beweismethoden schon nicht anerkennen, so ist es uns doch gelungen, vom klassischen Standpunkt aus das tatsächliche Vorliegen jenes Sachverhaltes zu beweisen, dessen Möglichkeit von intuitionistischer Seite zur Begründung der Ablehnung des tertium non datur angeführt wurde. Ich weiß nicht, ob ich nun den intuitionistischen Standpunkt korrekt interpretiere, aber es will mir scheinen, daß man noch weiter gehen kann. Ein konsequenter Intuitionist, der Wahrheit mit Verifizierbarkeit (Beweisbarkeit) identifiziert, ist gar nicht imstande, die Frage nach der Existenz absolut unentscheidbarer Sätze zu stellen. Er kann höchstens fragen, nach der Beweisbarkeit oder Nichtbeweisbarkeit der Existenz. Der konsequente Intuitionist ist also nicht einmal in der Lage, die Frage zu stellen, deren positive Beantwortung er in der Begründung seines Systems voraussetzt.

Der Logizismus, dessen Hauptthese besagt, daß die Mathematik in der Logik ohne zusätzliche Axiome begründet werden kann, scheint schon dadurch erschüttert, daß man die Wahl zwischen verschiedenen Systemen der Logik hat. Es erscheint schlechterdings unmöglich, das Auswahlaxiom oder das Axiom von der Existenz unerreichbarer Mengen, von dessen Gültigkeit nach Zykov ((34) vgl. auch (19)) die Gültigkeit gewisser Formeln des Prädikatenkalküls zweiter Stufe abhängt, rein logisch zu begründen.

Der Formalismus, der seine Hauptaufgabe in der Begründung der gesamten Mathematik durch Formalisierung und finite Konsistenzbeweise in der Metasprache sah, scheint durch die Entwicklung als undurchführbar erwiesen. Wer einen sehr "starken" mathematischen Standpunkt einnehmen will, muß auf finite Konsistenzbeweise verzichten und das Risiko eingehen, daß sein System sich als widerspruchsvoll erweist.

Die Unendlichkeitsproblematik.

Hermann Weyl (33) prägte den Satz, daß die Mathematik die Wissenschaft sei, die sich mit dem Unendlichen befaßt. Wo wir aber in der Mathematik mit dem Unendlichen zu tun haben, erhalten wir fast immer unentscheidbare Theorien und damit absolut unentscheidbare Sätze. Die Postulierung eines unendlichen Gegenstandsbereiches, deren Notwendigkeit sich das erste Mal beim Russell-Whitehead'schen Begründungsversuch der Mathematik zeigte, bringt es mit sich, daß Definitionen, die in endlichen Bereichen vollständig ausgewertet werden könnten, im Unendlichen oft auf absolut unentscheidbare Sätze führen. So erweist sich auch die semantische Wahrheitsdefinition der Arithmetik für gewisse Sätze als nicht auswertbar. Man kann sich fragen, ob es unter diesen Umständen sinnvoll ist, einen Begriff der arithmetischen Wahrheit zu akzeptieren. Wenn ein derartiger Begriff in einem platonischen Sinne existieren sollte, dann in einem Himmel, der uns Sterblichen niemals zugänglich sein wird. Da der Prädikatenkalkül erster Stufe unentscheidbar, der Prädikatenkalkül zweiter Stufe nicht einmal axiomatisierbar ist, scheint auch dem Begriff der logischen Wahrheit gegenüber Vorsicht am Platze. Der von Stegmüller in (26), S.60, als relativ harmlose Variante des Platonismus behandelte konstruktive Konzeptualismus führt zu den gleichen Konsequenzen. Die Annahme eines unendlichen Gegenstandsbereiches scheint so stark von der uns umgebenden endlichen Welt abzuweichen, daß es im Grunde gar nicht verwunderlich ist, wenn wir zu den geschilderten, im

ersten Augenblick paradox anmutenden, Ergebnissen gelangen. Verwunderlich ist es aber, daß dann doch die so eng mit dem Unendlichkeitsbegriff verbundene Mathematik sich in unserer, in jeder Hinsicht endlichen Welt, so gut bewährt, wie sie das in Naturwissenschaft und Technik tut. Es stellt sich die Aufgabe, diesen seltsamen Sachverhalt zu verstehen. Bis jetzt allerdings scheint es so, daß die klassische Mathematik des Unendlichen, diese, wie wir sahen, allzu freie Schöpfung des menschlichen Geistes, wesentlich besser geeignet ist, eine Beschreibung der physischen Welt zu liefern, als der Torso, der von ihr übrig bliebe, beschränkte man sich auf das Endliche, das nominalistisch Beschreibbare.

Literatur

- 1.) Brouwer, L.E.J., Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung ? Proc. Akad. Amsterdam, Bd. 23, S.955-65
- 2.) ----- Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbes. in der Funktionentheorie, J.f. reine u. angew. Math. Bd. 154 S.1, 1924
- 3.) Feferman, S. Formal consistency proofs and interpretability of theories, Dissertation, Berkeley 1957.
- 4.) ----- Sentences of arithmetic which formally express consistency, Formal consistency proofs and interpretability of theories, (Abstracts) J.S.L. Bd.22, 1957 S.161.
- 5.) ----- Ordinal logics re-examined, on the strength of ordinal logics, (Abstracts), J.S.L. Bd.23, 1958, S.105
- 6.) ----- Some completeness results for recursive progressions of theories (ordinal logics). J.S.L. Bd.24, S.312, 1959.
- 7.) ----- Arithmetization of metamathematics in a general setting. Fundamenta Mathematicae, Bd.49, 1960, S.35.
- 8.) Curry, H.B. Outlines of a formalist philosophy of mathematics. Amsterdam 1958
- 9.) Gödel, K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandte Systeme, Monatshefte f. Mathematik u. Physik, Bd. 38, S.173
- 10.) Hilbert, D. Gesammelte Abhandlungen, Bd.III. Berlin 1935 S. 297/98. Vortrag auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress, Paris 1900
- 11.) Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, 4.Aufl. Berlin 1959.
- 12.) Hoering, W. Bericht über die Diskussion im Symposium: "Ordnung in der Logik", erscheint im Bericht über den Deutschen Philosophen-Kongreß, München, 1960. Veröffentlichung voraussichtlich Herbst 1961.
- 13.) Kalmár, L. An argument against the plausibility of Church's thesis, in: A.Heyting(Hsg) Constructivity in mathematics. Amsterdam 1959

- 14.) Kleene, S.C. On notation for ordinal numbers, J.S.L.
Bd. 3, 1938, S.150
- 15.) ----- Hierarchies of number-theoretic predicates,
Bull.Am. Math. Soc. Vol. 61, 1955, S.193
- 16.) ---- u.Post,E.L.The upper semi-lattice of degrees of
recursive unsolvability. Annals of
Mathematics, Vol. 59, 1954, S.379
- 17.) Kreisel, G. Ordinal logics and the characteri-
zation of formal concepts of proof,
Proc. Int. Congr. of Mathematicians.
1958, Cambridge 1960.
- 18.) Mostowski, A. Sentences undecidable in formalized
arithmetic, Amsterdam 1957.
- 19.) ----- An undecidable arithmetical statement,
Fundamenta Mathematicae, Bd.36, 1949,
S. 143.
- 20.) Péter, R. Rekursive Funktionen, Akademieverlag,
Berlin 1957 (2.Aufl.)
- 21.) Scholz, H. und Grundzüge der Mathematischen Logik,
Hasenjaeger,G. Berlin 1961.
- 22.) Shoenfield, J.R.On degree of unsolvability, Annals
of Mathematics, Bd. 69, 1959, S.644
- 23.) Spector, C. On degrees of recursive unsolvability,
Annals of Mathematics, Bd. 64, 1955,
S. 581
- 24.) ----- Recursive well-orderings, J.S.L.
Bd.20, 1955, S.151.
- 25.) Stegmüller, W. Metaphysik, Wissenschaft, Skepsis,
Frkft./M.-Wien 1954.
- 26.) ----- Das Universalienproblem einst und
jetzt, 1.Teil :Archiv f.Phil. Bd.6,
S.192, 2.Teil :Archiv f.Phil. Bd.7,
S.45
- 27.) Surányi, J. Reduktionstheorie des Entscheidungs-
problems, Budapest 1959.
- 28.) Tarski, A. Der Wahrheitsbegriff in den formali-
sierten Sprachen, Studia Philosophica,
Bd.1, 1936, S.261. In engl. Übersetzung
nachgedruckt in 29.):
- 29.) ----- Logic, Semantics, Metamathematics,
Oxford 1956 (28.) auf S.152
- 30.) Tarski,Mostows-Undecidable theories, Amsterdam 1953.
ki,Robinson,
(Raphael, M.)

- 31.) Turing, A. Systems of logic based on ordinals,
Proc. of the London Math. Soc.,
2nd series, Bd.45, 1939, S. 161.
- 32.) Wang, H. The formalization of mathematics,
J.S.L., Bd.19, 1954, S.241.
- 33.) Weyl, H. Philosophie der Mathematik.
und Naturwissenschaft,
in: Handbuch der Philosophie,
Oldenburg, 1928.
- 34.) Zykov, A.A. The spectrum problem in the
extended predicate calculus,
Izv. Akad. Nauk. SSSR., Ser.
Math., Bd.17, 1953, S.63;
nachgedruckt in:
Americ. Mathem. Soc. Translations,
Ser.2, Vol. 3, S.1.

Lebenslauf

Ich, Walter Hoering, wurde am 22.V.1933 in Tetschen/Elbe geboren, als Sohn des Bankbeamten Alwin Hoering und der Fachlehrerin Helene Hoering, geb. Rudisch.

In Tetschen besuchte ich die Volksschule 1939 - 1943, anschliessend die Oberschule bis Kriegsende und - nach der Vertreibung - in Bayern die Oberrealschulen in Weißenburg, Memmingen, Landshut und München. Hier legte ich 1952 an der Ludwigs-Oberrealschule die Reifeprüfung ab.

Ich studierte Physik und später auch Philosophie an der Universität München.

Das Studium der Physik nahm ich im Wintersemester 1952/53 auf und erwarb das Vordiplom im Herbst 1955. 1957 erhielt ich am Institut für Physikalische Chemie das Thema meiner Diplomarbeit (von Priv. Dozent Dr. E. Wittig), später von Prof. Schwab das Thema meiner Doktorarbeit: "Zusammenhänge zwischen katalytischer Aktivität und Lumineszenzeigenschaften von Phosphoren". Beide Arbeiten stehen vor dem Abschluß.

Das Studium der Philosophie begann ich offiziell, mit Genehmigung des naturwissenschaftlichen und des philosophischen Dekanates im Wintersemester 1956/57, die Untersuchungen, welche schließlich zu vorliegender Dissertation geführt haben, schon wesentlich früher. Ich hörte u.a. Vorlesungen bei Prof.DrA. Wenzl und Prof. Dr. A. Dempf und war insbesondere Schüler von Prof. Dr. W. Britzelmayr und Prof. Dr. W. Stegmüller. Seit April 1959 verwalte ich eine Assistentenstelle am 2. Philosophischen Seminar der Universität München.

Ergänzung zu S.12

Der Autonomiebegriff der Systeme und Folgen von Systemen. In etwas exakterer Weise als in der Skizze von Feferman (5,6) kann man die Autonomie von Systemen folgendermaßen charakterisieren, wenn man die Terminologie von Feferman (5,6) und Kleene (14) voraussetzt.

Es sei eine Funktion $r(x)$ und eine erzeugende Funktion $g(x)$ gegeben und eine daraus entspringende Progression von Systemen T_i

Das durch die beiden gegebenen Funktionen bestimmte autonome System T^a ist die Vereinigung aller Systeme T_{α_i} für die gilt: Es gibt eine mit der Kleene-Nummer von 1 beginnende Folge von Kleene-Nummern von Ordnungszahlen α_i , der Art, daß für alle α_i gilt:

$$T_{\alpha_i} \vdash O(\alpha_{i+1}) \wedge \alpha_i <_O \alpha_{i+1}.$$

Folgen von Systemen.

Auf ein autonomes System kann man wieder die Erweiterungsoperation g anwenden. Eine autonome Folge entsteht dadurch, daß man sie auf jedes System der Folge so oft anwendet, als es die Ordinalzahlbezeichnungen γ (im Kleene-System) gestatten, für die $O(\gamma)$ in vorhergehenden Systemen der Folge ableitbar ist.

